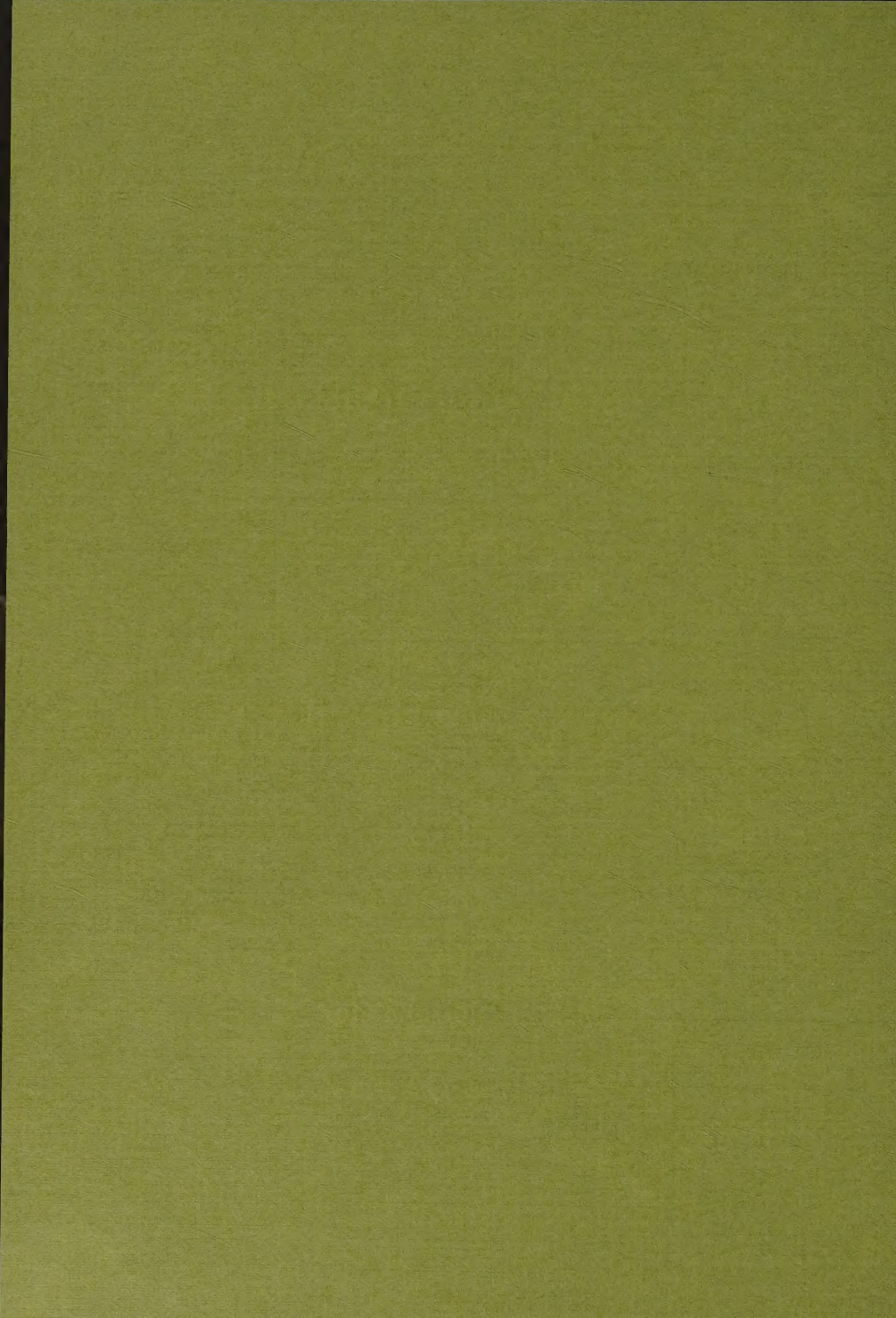


Interne Vollständigkeit

von
Winfried Günselmann
aus
Bamberg

1973



Interne Vollständigkeit

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt
von
Winfried Gunselmann
aus
Bamberg

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

interne Vollständigkeit

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades



Tag der mündlichen Prüfung: 28. November 1973

Dekan: Professor Dr. J. Christiansen

Erstberichterstatte: Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatte: Professor Dr. D. Kölzow

Inhalt

Einleitung	1
I. Vorbereitungen	3
II. Die interne Topologie auf Kegeln	7
III. Ein Kriterium	20
IV. Vollständigkeitskriterien mit topologischen Prämissen	27
V. Durchschnitte intern vollständiger Mengen	33
Literaturverzeichnis	44

Einleitung

Seit den Untersuchungen von GLEASON [10] über Funktionenalgebren interessiert man sich für Gleason - parts. Bei ihrem Studium gelang BEAR [4] 1965 eine geometrische Charakterisierung, deren Grundidee sich als unabhängig von dem zunächst speziellen Kontext erwies. BEAR und WEISS [6] definieren denn auch die sogenannte Part - Metrik oder interne Metrik allgemein für beliebige konvexe Mengen C ohne Gerade in einem reellen Vektorraum. Der Abstand der Punkte $x, y \in C$ wird erklärt durch

$$d(x, y) = \inf \left\{ \log (1 + 1/r) \mid r > 0, x + r(x - y) \in C \right. \\ \left. \text{und } y + r(y - x) \in C \right\}.$$

Unabhängig von ihrer Verbindung zu Gleason - parts gewinnt die interne Metrik durch die Arbeiten von BAUER [1], [2] und BAUER-BEAR [3] an Bedeutung. Ist nämlich C einteilig (d.h. $d(x, y) < \infty$ für alle $x, y \in C$) und der metrische Raum (C, d) vollständig ("intern vollständig"), so verhält sich C in mancher Hinsicht wie ein Banachraum. In [1] wird zum Beispiel eine dem open mapping theorem von BANACH, in [3] eine dem selection theorem von MICHAEL entsprechende Aussage bewiesen.

Eine Reihe von Kriterien für die interne Vollständigkeit konvexer Mengen ohne Gerade findet man in [2]. Bei allen wird von der Vollständigkeit einer oder in einer gegebenen Vektorraumtopologie auf die interne Vollständigkeit geschlossen. Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Herleitung eines weiteren Kriteriums, das sich mit Hilfe "interner" Eigenschaften formulieren läßt. Es ist in gewissen Fällen, auf die man das Problem aber stets zurückführen kann, sogar notwendig und hinreichend für die interne Vollständigkeit.

Vorbereitend wird in Kapitel I der bereits bekannte Zusammen-

hang zwischen einteiligen konvexen Mengen ohne Gerade und normierten Vektorräumen dargestellt. Kapitel II dient der Untersuchung der internen Topologie auf konvexen Kegeln ohne Gerade. Ideen und Sätze von JAMESON [11] spielen dabei eine entscheidende Rolle. Es zeigt sich, daß man die Untersuchung der internen Vollständigkeit einer beliebigen konvexen Menge ohne Gerade immer in geeigneten Kegeln durchführen kann. Die Kegelordnung bzw. eine leicht abgeänderte Ordnungsrelation erlaubt aber eine Beschreibung der internen Topologie eines konvexen Kegels ohne Gerade. Aus diesen Ergebnissen folgt dann leicht das angekündigte Kriterium, das an den Beginn des Kapitels III gestellt und in seinem Verlauf auf die Umkehrbarkeit untersucht wird:

Wenn jede monoton steigende, beschränkte Folge in einem konvexen Kegel P ohne Gerade ein Supremum besitzt, so ist P intern vollständig.

Einteilige Kegel mit ordnungsbeschränkter Basis erlauben die Umkehrung dieser Aussage.

Aus dem Ergebnis, daß die Vollständigkeit in einer gegebenen lokalkonvexen Hausdorff - Topologie die interne Vollständigkeit nach sich zieht, wenn sie nur gröber ist als die interne Topologie, lassen sich in Kapitel IV eine Reihe bekannter Kriterien für interne Vollständigkeit ableiten.

In Kapitel V werden schließlich Vollständigkeitskriterien für Durchschnitte intern vollständiger Mengen angegeben.

Den Herren Hommel und Leha vom Mathematischen Institut der Universität Erlangen danke ich für so manches klärende Gespräch. Besonderen Dank schulde ich meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. H. Bauer für die Annahme als Doktorand und die stete Förderung dieser Arbeit in all den Phasen ihrer Entstehung.

I. Vorbereitungen

Sei E ein reeller Vektorraum und $C \subset E$ eine konvexe Menge, die keine (affine) Gerade enthält. BEAR und WEISS [6] definieren auf C in folgender Weise eine verallgemeinerte Metrik, d.h. eine Abbildung von $C \times C$ nach $[0, +\infty]$ mit den ansonsten üblichen Metrikeigenschaften:

Für jedes $(x, y) \in C \times C$ sei

$$d_C(x, y) := \inf \left\{ \log(1 + 1/r) \mid r > 0, x + r(x - y) \in C \right. \\ \left. \text{und } y + r(y - x) \in C \right\},$$

wobei für die leere Menge $\emptyset \quad \inf \emptyset = +\infty$.

$$x \sim y : \Leftrightarrow d_C(x, y) < +\infty$$

definiert auf C eine Äquivalenzrelation, deren zugehörige Klassen wieder konvexe Mengen (ohne Gerade) sind und Teile von C heißen. d_C nennt man die interne Metrik von C . Sie induziert auf C die interne Topologie.

Die folgenden Ergebnisse findet man in BAUER [1], [2] und BAUER - BEAR [3] und folgen schnell aus der Definition:

1. Für jeden Teil D von C stimmt die Restriktion von d_C auf $D \times D$ mit der internen Metrik von D überein.
2. C ist bezüglich seiner internen Metrik vollständig ("intern vollständig") genau dann, wenn jeder Teil D von C bezüglich seiner internen Metrik vollständig ist.
3. Translationen der Form $x \mapsto a + x$ ($a \in E$) sind Isometrien zwischen C und $a + C$ bezüglich der jeweiligen internen Metriken.

(1.1) Satz: Sei C eine einteilige konvexe Menge ohne Gerade in einem reellen Vektorraum E , $0 \in C$ und C erzeuge E . Dann wird die interne Topologie von C von genau einer Vektorraumtopologie T_C auf E induziert. Sie ist normierbar und C ist offen bezüglich T_C . C ist genau dann intern vollständig, wenn T_C vollständig ist.¹⁾

Beweis: Lediglich die Eindeutigkeit von T_C und die Offenheit von C in E bzgl. T_C werden in [1] nicht gezeigt. Sei T_C eine Vektorraumtopologie auf E , welche in C die interne Topologie induziert, $y \in C$, $p > 0$ und

$$K_p(y) := \{x \in C \mid d_C(x, y) < p\}.$$

Dann gibt es eine ausgeglichene Umgebung U von 0 bzgl. T_C mit

$$(y + U) \cap C \subset K_p.$$

Sei $y \neq x \in y + U$. Wir zeigen, daß $x \in C$ und damit auch $x \in K_p(y)$. Da nach BAUER [1; p.332]

$$E = \bigcup_{t>0} tC$$

gilt, existiert ein

$$t > 0 : t(x - y) \in C.$$

C ist einteilig und $0 \in C$. Deshalb gibt es ein $r > 0$ mit

$$(1 + r)y = y + r(y - 0) \in C.$$

Wegen der Konvexität von C gilt weiterhin

$$y + \frac{rt}{1+r}(x - y) = \frac{1}{1+r}(1 + r)y + \frac{r}{1+r}t(x - y) \in C$$

und dies sogar für alle genügend kleinen $r > 0$. Für alle genügend kleinen $r > 0$ ist aber auch

$$y + r(x - y) \in y + U,$$

da U absorbierend ist und folglich

$$a := \sup \{r \mid y + r(x - y) \in K_p(y)\} > 0.$$

1) Die Aussage dieses Satzes wurde teilweise auch von ZITZMANN [12; Satz 3.11] gezeigt.

Ist $a > 1$, so folgt $x \in K_p(y)$, denn für jedes reelle r mit $0 < r < a$ liegt dann $y + r(x - y)$ in $K_p(y)$, wie man leicht sieht. Im Fall $a \leq 1$ wähle man $0 < r < a$ und $0 < s < (e^p - 1)^{-1}$ so, daß $(1 + s)r > a$. Dann gilt

$$y + r(x - y) \in K_p(y), \quad p < \log(1 + 1/s)$$

und daher

$$y + (1 + s)r(x - y) = y + r(x - y) + s(y + r(x - y) - y) \in C.$$

Da U ausgeglichen ist, folgt

$$y + t(x - y) \in y + U \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq 1.$$

Ist $(1 + s)r \geq 1$, so liegt x wegen der Konvexität von C in C und dann auch in $K_p(y)$.

Ist $(1 + s)r < 1$, so folgt

$$y + (1 + s)r(x - y) \in (y + U) \cap C \subset K_p(y),$$

im Widerspruch zur Definition von a . Wir erhalten also

$$(y + U) \subset K_p(y).$$

Sei nun U eine beliebige T_C -Umgebung der 0 und $y \in C$. Dann ist $(y + U) \cap C$ eine interne Umgebung von y . Ist T eine zweite Vektorraumtopologie auf E , die in C die interne Topologie induziert, so gibt es eine T -Nullumgebung V mit

$$(y + V) \subset (y + U) \cap C \subset y + U,$$

also $V \subset U$. Vertauscht man T_C und T in dieser Argumentation, so folgt schließlich die Gleichheit von T_C und T .

Im Weiteren bezeichne N immer die Menge der natürlichen, R die Menge der reellen Zahlen und $N_0 := N \cup \{0\}$. Gilt eine Eigenschaft bzgl. einer internen Metrik oder Topologie, so setzen wir abkürzend das Wort "intern" davor, z.B. "interne Cauchyfolge" oder " C - interne Cauchyfolge", um die zugrundeliegende Menge mit anzugeben, bezüglich deren interner Metrik die gegebene Folge Cauchyfolge sein soll. Ist C' eine weitere

konvexe Menge ohne Gerade in E mit $C \cap C' \neq \emptyset$, so kann es etwa eine C - interne Cauchyfolge in C' geben, die nicht notwendig auch C' - interne Cauchyfolge ist.

Alle auftretenden Vektorräume seien reell.

II. Die interne Topologie auf Kegeln

Ist P ein konvexer Kegel ohne Gerade (mit Spitze 0 , aber nicht notwendig $0 \in P$) in einem Vektorraum E , so gilt insbesondere $P \cap (-P) \subset \{0\}$. Durch

$$x \prec_P y : \Leftrightarrow y - x \in P^{(1)}$$

(kurz: $x \prec y$) für alle $x, y \in E$ wird in E eine transitive, antisymmetrische "Ordnung" induziert, die mit der Vektorraumstruktur verträglich ist: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in E$ gilt

$$0 < a \text{ und } 0 \prec x \implies 0 \prec ax$$

und

$$x \prec y \implies x + z \prec y + z.$$

Ist $r > 0$ und $x, y \in P$, so folgt durch Umformung unmittelbar die Äquivalenz

$$x + r(x - y) \in P \text{ und } y + r(y - x) \in P$$

$$\Leftrightarrow x \prec (1 + 1/r)y \text{ und } y \prec (1 + 1/r)x$$

und damit ($d := d_P$)

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \inf \{ \log a \mid a^{-1}x \prec y \prec ax, a > 1 \} \\ &= \inf \{ \log a \mid a^{-1}x \prec y \prec ax, a \geq 1 \}. \end{aligned}$$

(2.1) Satz (BAUER - BEAR [3; p.21]): Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E . Jeder Teil Q von P ist konvexer Teilkegel (ohne Gerade) von P .

Beweis: Sei Q Teil von P . Nach den Vorbemerkungen im Abschnitt I ist Q konvex. Für jedes $x \in Q$ und jedes $a > 0$ ist aber

$$(ca)^{-1}x \prec ax \prec (ca)x,$$

falls $c > \max \{1, a^{-2}\}$ und daher Q ein Kegel.

(2.2) Bemerkung: Ist $0 \in P$, so bildet $\{0\}$ einen Teil von P ,

1) Der eventuelle Verzicht auf die Reflexivität durch diese Definition von $\prec$ erweist sich als vorteilhaft.

da O Extrempunkt von P ist.

Mit Hilfe der Kegelordnung $\prec$ soll später ein Vollständigkeitskriterium für die interne Metrik formuliert werden. Wir zeigen deshalb zunächst, wie man sich bei der Untersuchung der internen Vollständigkeit auf die Situation konvexer Kegel ohne Gerade zurückziehen kann.

(2.3) Lemma: In einem Vektorraum E sei P ein Kegel mit Basis B . Dann gilt:

1. P enthält eine Gerade $\Leftrightarrow B$ enthält eine Gerade.
2. Enthält P keine Gerade, so ist die interne Metrik d_B die Restriktion der internen Metrik d_P auf $B \times B$.

Beweis: Zu 1: Die Richtung " $\Rightarrow$ " ist klar. Für die Umkehrung sei f eine Linearform auf E mit

$$B = \{x \in E \mid f(x) = 1\} \cap P.$$

Enthält P eine Gerade, so gibt es ein $x \in P$ und $0 \neq y \in E$ mit

$$x + ty \in P \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$f(x + ty) = f(x) + tf(y) \geq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

folgt $f(y) = 0$. Ist $x = 0$, so beschreibt $z + ty : t \in \mathbb{R}$ für jedes $z \in B$ eine Gerade in B , da mit ty auch $z + ty \in P$ und

$$f(z + ty) = f(z) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ist $x \neq 0$, also $f(x) \neq 0$, so liefert $f^{-1}(x)(x + ty) : t \in \mathbb{R}$ eine Gerade in B , im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zu 2: Sei $r > 0$ und $x, y \in B$. $x + r(x - y)$ und $y + r(y - x)$ liegen in P genau dann, wenn sie in B liegen, wie man nach Anwendung der obigen Linearform f erkennt.

(2.4) Lemma: Sei C eine konvexe Menge ohne Gerade in einem Vektorraum E und $B := C \times \{1\} \subset E \times \mathbb{R}$. Die kanonische

Einbettung $x \mapsto (x, 1)$ von C in B ist eine Isometrie bezüglich der jeweiligen internen Metriken.

Beweis: Mit C ist auch B konvex und enthält keine Gerade.

Sei $r > 0$ und $x, y \in C$.

$$x + r(x - y) \in C, y + r(y - x) \in C$$

$$\Leftrightarrow (x + r(x - y), 1) \in B, (y + r(y - x), 1) \in B$$

$$\Leftrightarrow (x, 1) + r((x, 1) - (y, 1)) \in B, (y, 1) + r((y, 1) - (x, 1)) \in B.$$

Auf B und den hiervon erzeugten Kegel ist nun Lemma (2.4) anwendbar.

(2.5) Satz: In einem Vektorraum E sei P ein konvexer Kegel ohne Gerade mit Basis B . Dann gilt:

P ist intern vollständig $\Leftrightarrow B$ ist intern vollständig.

Beweis: " $\Rightarrow$ ". Nach Lemma (2.3), Aussage 2 genügt es zu zeigen, daß B abgeschlossen ist in P bzgl. der internen Topologie von P . Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ konvergiere intern gegen $x \in P$. Sei f eine Linearform auf E mit

$$B = \{x \in E \mid f(x) = 1\} \cap P.$$

Dann ist $f \geq 0$ auf P und daher nach BAUER - BEAR [3;p.17] intern stetig. Es folgt $f(x) = 1$ und somit $x \in B$.

" $\Leftarrow$ ". Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ interne Cauchyfolge in P . Da

$\{0\}$ ein Teil von P ist, falls $0 \in P$ und jede interne Cauchyfolge in P schließlich in einem Teil von P liegt, können wir uns auf den Fall $(x_n) \subset P \setminus \{0\}$ beschränken. Es gibt dann Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit

$$a_n > 0 \text{ und } x_n = a_n y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei f wie im ersten Teil des Beweises, $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$d_P(x_n, x_m) < 1, \text{ also } e^{-1}x_n < x_m < ex_n$$

für alle $m, n \geq n_0$ und $r > 0$. Sei weiter $s > 0$ so gewählt,

daß

$$e^{-1}(e^{-s} - 1)a_{n_0} > -e^{-r} \quad \text{und} \quad e(e^s - 1)a_{n_0} < e^r$$

und $n_0 \leq m_0 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$d_P(x_n, x_m) < s, \text{ also } e^{-s}x_n < x_m < e^s x_n$$

für alle $n, m \geq m_0$. Dann gilt zunächst

$$f(x_n) = a_n f(y_n) = a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $f \geq 0$ auf P ist, folgt

$$e^{-s}a_n \leq a_m \leq e^s a_n \quad \text{für alle } n, m \geq m_0$$

und daher

$$\begin{aligned} -e^{-r} &\leq e^{-1}(e^{-s} - 1)a_{n_0} \leq (e^{-s} - 1)a_n \leq a_m - a_n \leq (e^s - 1)a_n \\ &\leq e(e^s - 1)a_{n_0} \leq e^r \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq m_0$. Somit ist (a_n) Cauchyfolge und konvergiere

etwa gegen $a \in \mathbb{R}$. Für $m_0 \leq l_0 \in \mathbb{N}$ gelte $d_P(x_n, x_m) < r/3$, also

$$e^{-r/3}a_n y_n < a_m y_m < a_n y_n e^{r/3} \quad \text{und daher} \quad e^{-r/3}a_n \leq a_m \leq e^{r/3}a_n$$

für alle $n, m \geq l_0$. Dann folgt

$$e^{-r}y_n = e^{-r/2}e^{-r/2}y_n < \frac{a_n}{a_m}e^{-r/2}y_n < y_m < e^{r/2}\frac{a_n}{a_m}y_n < e^r y_n$$

für alle $n, m \geq l_0$. Somit ist (y_n) P -interne und wegen

Lemma (2.3), Aussage 2 sogar B -interne Cauchyfolge und konvergiere etwa gegen $y \in B$. Dann konvergiert (x_n) gegen ay :

$$e^{-r}x_n = e^{-r/2}a_n e^{-r/2}y_n < ay < e^{r/2}a_n e^{r/2}y_n = e^r x_n$$

für alle $n \geq l_0$.

(2.6) Definition: Sei P ein konvexer Kegel in einem Vektorraum E . Eine Linearform f auf E heiße positiv oder P -positiv, wenn

$$f(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in P$$

und strikt positiv, wenn

$$f(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in P \setminus \{0\}.$$

(2.7) Definition: Sei $(E, \langle \rangle)$ ein geordneter Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset E$ heiße ordnungskonvex, wenn für alle $z \in E$ und alle $x, y \in A$ gilt:

$$x \ll z \ll y \implies z \in A.$$

Sei nun P einteiliger konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E und $P - P = E$. Nach den Ergebnissen von Abschnitt I ist die Abbildung $x \mapsto y + x$ insbesondere für $y \in -P$ eine Isometrie von P auf $y + P$ bzgl. der jeweiligen internen Metriken. Mit P erzeugt auch $y + P$ den Raum E . Wegen $0 \in y + P$ wird die interne Topologie von $y + P$, also auch die von P nach Satz (1.1) von einer geeigneten normierbaren Vektorraumtopologie auf E induziert. Wir wollen diese Normtopologie näher beschreiben. Dazu definieren wir für jedes $y \in P$ und jedes $r > 0$ die Mengen

$$U_y^r := \{x \in E \mid (1-r)y \leq x \leq (1+r)y\}$$

und

$$V_y^r := U_y^r - y = \{x \in E \mid -ry \leq x \leq ry\}.$$

(2.8) Satz: Sei P einteiliger konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E und $P - P = E$. Für jedes $y \in P$ ist

$(V_y^r)_{0 < r < +\infty}$ eine Basis symmetrischer, konvexer, ordnungskonvexer, beschränkter Umgebungen der 0 in der normierbaren Vektorraumtopologie T_P auf E , die in P die interne Topologie induziert.

Beweis: 1. $(U_y^r)_{0 < r < 1}$ ist interne Umgebungsbasis von

$y \in P$: Sei nämlich $r > 0$. Man wähle $d > 0$ so, daß

$$d < \log(1+r).$$

Es folgt $1 + r > e^d$ und wegen $2 < e^d + e^{-d}$ sogar
 $1 - r < e^{-d}$.

Also enthält U_y^r die d_P -Kugel

$$K_y^d := \{x \in E \mid d_P(x, y) < d\}.$$

Ist umgekehrt $d > 0$ gegeben und setzt man $r := 1 - e^{-d}$, so folgt

$$1 + r = 2 - e^{-d} < e^d$$

und damit $U_y^r \subset K_y^d$.

2. $(V_y^r)_{0 < r < +\infty}$ ist Fiterbasis. Wegen

$$-ry < x < ry \implies ry > -x > -ry$$

für alle $x \in E$ sind die V_y^r symmetrisch. Sind $x, z \in V_y^r$

und ist $0 < d < 1$, so folgt aus

$$-dry < dx < dry$$

und

$$-(1-d)ry < (1-d)z < (1-d)ry :$$

$$-ry < dx + (1-d)z < ry$$

und damit die Konvexität von V_y^r . Nach 1. und Satz (1.1)

enthält V_y^r eine geeignete Normumgebung der 0 und ist daher für jedes $r > 0$ absorbierend. Schließlich gilt $2 V_y^{r/2} =$

V_y^r . Wegen 1. bestimmt also $(V_y^r)_{0 < r < +\infty}$ die normierbare

Vektorraumtopologie auf E , die in P die interne Topologie

induziert. Aus $V_y^r = r V_y^1$ für alle $r > 0$ folgt die Be-

schränktheit der V_y^r .

3. Seien $r > 0$, $x, z \in V_y^r$, $w \in E$ und gelte

$x < w < z$. Es folgt $-ry < x < w < z < ry$ und $w \in V_y^r$. Da-

her ist V_y^r ordnungskonvex.

(2.9) Bemerkung: Für alle $x, y \in P$ gibt es ein $r_0 > 0$, so daß $x + \frac{r}{y} \in P$, wenn $0 < r < r_0$, und $(x + \frac{r}{y})_{0 < r < r_0}$ bildet eine interne Umgebungsbasis von x , da P bzgl. T_P offen ist. T_P ist gerade die Ordnungstopologie.

(2.10) Korollar: Sei P einteiliger konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E und $P - P = E$. Jede positive Linearform f auf E ist stetig bzgl. der Topologie T_P .

Beweis: Sei $0 \neq y \in P$ (Der Fall $P = \{0\}$ ist trivial). Die Minkowski - Norm von V_y^1 definiert T_P . Für alle $x \in V_y^1$ und jede positive Linearform f auf E ist aber

$$-f(y) \leq f(x) \leq f(y),$$

also f beschränkt auf V_y^1 und somit stetig.

Wir formulieren noch ein Ergebnis von JAMESON [11; p.87] für unsere Situation um:

(2.11) Satz: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E , P einteilig und $P - P = E$. Dann ist jede stetige Linearform auf E Differenz zweier positiver, stetiger Linearformen auf E .

Dann hat nämlich $0 \in E$ eine Umgebungsbasis, die aus ordnungskonvexen Mengen besteht. Im Vorgriff auf Definition (4.4) bemerken wir noch, daß P im obigen Fall normal ist.

Kommen wir auf die anfänglichen Bedingungen zurück: Es sei P ein konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E , $\angle_P$ die von P induzierte Ordnung. Wir werden später am Beispiel (2.20) sehen, daß eine $\angle_P$ - monoton steigende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P , die gegen ein $x \in P$ konvergiert, x nicht zum $\angle_P$ - Supremum haben muß, selbst dann nicht, wenn P intern voll-

ständig ist. Wir führen deshalb eine etwas abgeänderte Ordnung $\prec_P$ ein, die die gewünschte Eigenschaft hat.

(2.12) Definition: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E , $x, y \in E$.

$$x \prec y : \Leftrightarrow x \prec_P y : \Leftrightarrow x \prec_P ay \text{ für alle } a > 1.$$

(2.13) Eigenschaften von $\prec$:

1. $x \prec y \Rightarrow x \prec y$ für alle $x, y \in E$.
2. $x \prec x$ für alle $x \in E$, da $(a - 1)x \in P$ für alle $a > 1$.
3. $x \prec y$ und $y \prec x \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in E$. Es ist nämlich

$$x - y \prec (a - 1)y \text{ und } y - x \prec (a - 1)x \prec (a - 1)ay$$

und daher

$0 \prec y - (a - 1)^{-1}(x - y)$ und $0 \prec -(a(a - 1))^{-1}(y - x) + y$ für alle $a > 1$, also

$$y + t(x - y) \in P \text{ für alle } t \neq 0$$

und wegen der Konvexität von P sogar für alle $t \in \mathbb{R}$. Da P keine Gerade enthält, folgt $x = y$.

4. $x \prec y$ und $y \prec z \Rightarrow x \prec z$ für alle $x, y, z \in E$; denn es ist $x \prec a^{1/2}y$ und $y \prec a^{1/2}z$, also $x \prec az$ für alle $a > 1$.

Daher ist $\prec$ eine Ordnungsrelation auf E .

5. $x \prec y \Rightarrow x + z \prec y + z$ für alle $x, y \in E$ und alle $z \in P$. Für alle $a > 1$ gilt nämlich

$$x + z \prec ay + z \prec a(y + z).$$

Für beliebige $z \in E$ ist die Aussage falsch, wie man bereits an Beispielen im $\mathbb{R}^2$ sieht.

6. $0 \prec x$ und $0 \prec c \Rightarrow 0 \prec cx$ für alle $x \in E$ und alle $c \in \mathbb{R}$, denn mit $0 \prec ax$ ist auch $0 \prec acx$ für alle $a > 1$.
7. Für alle $r > 0$ und alle $x, y \in P$ gilt:

$$d_P(x, y) \leq r \iff e^{-r}x \prec y \prec e^r x.$$

Das folgt aus der Gleichung unmittelbar vor Satz (2.1).

8. Sofort aus der Definition von $\prec$ folgt für jedes $A \subset E$:

A ist $\prec$ -nach oben beschränkt $\iff A$ ist $\prec$ -nach oben beschränkt. Obere Schranken für $A \subset P$ liegen in P .

(2.14) Definition: Eine Teilmenge A eines Vektorraumes E heiße linear abgeschlossen, wenn für jedes $x \in E$ gilt: Falls es ein $y \in A$ gibt, so daß $cy + (1-c)x \in A$ für alle c mit $0 < c \leq 1$, dann ist bereits $x \in A$.

A ist also genau dann linear abgeschlossen, wenn der Durchschnitt mit jeder Geraden ein abgeschlossenes Geradenstück bzw. disjunkte Vereinigung von solchen ist.

(2.15) Bemerkung: insbesondere ist jede abgeschlossene Menge in einem topologischen Vektorraum linear abgeschlossen.

(2.16) Satz: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E . $\prec = \prec$ genau dann, wenn P linear abgeschlossen ist.

Beweis: 1. Sei $\prec = \prec$, $x \in E$, $y \in P$, $x \neq y$ und gelte $]x, y[\subset P$. Es folgt

$$\begin{aligned} a(x+y) - y &= (a-1)y + ax = \\ &= (2a-1)\left(\frac{a-1}{2a-1}y + \frac{a}{2a-1}x\right) \in P \end{aligned}$$

und damit

$$y \prec a(x+y) \text{ für alle } a > 1.$$

Wegen $\prec = \prec$ erhält man $y \prec x+y$ und somit $x = (x+y) - y \in P$.

2. Sei P linear abgeschlossen, $x, y \in E$ und $x \prec y$ für alle $a > 1$, insbesondere $2y - x \in P$. Für jedes d mit $0 < d < 1$ ist dann

$$d(2y - x) + (1-d)(y - x) = (d+1)y - x \in P,$$

somit $y - x \in P$ und $x \prec y$.

(2.17) Bemerkung: Im allgemeinen läßt sich $\prec_P$ nicht als $\prec_{\tilde{P}}$ schreiben, wobei $\tilde{P}$ den "linearen" Abschluß von P bedeute. $\tilde{P}$ kann nämlich eine Gerade durch 0 enthalten und definiert dann keine antisymmetrische Relation.

(2.18) Satz: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N \subset P$ eine $\prec$ -monoton steigende interne Cauchyfolge und $x \in P$. Dann gilt:

$x = \prec - \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow (x_n)$ konvergiert intern gegen x .

Beweis: " $\Rightarrow$ ". Sei $r > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ und $d_P(x_n, x_m) < r$ für alle $n, m \geq n_0$. Man erhält

$$e^{-r}x_n \prec x_m \prec e^rx_n$$

und wegen der Monotonie

$$x_m \prec e^rx_n \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ und alle } n \geq n_0.$$

Daher ergibt sich

$$e^{-r}x_n \prec x_m \prec x \prec e^rx_n \text{ für alle } n, m \geq n_0$$

und wegen der Eigenschaften 1 und 8 von " $\prec$ ":

$$d_P(x, x_n) \leq r \text{ für alle } n \geq n_0.$$

" $\Leftarrow$ ". Sei $r > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ und

$$e^{-r}x \prec x_n \prec e^rx \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wegen der Monotonie ist sogar

$$x_n \prec e^rx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und daher x eine $\prec$ -obere Schranke der Folge (x_n) . Ist auch $y \in P$ eine $\prec$ -obere Schranke, so gilt

$$e^{-r}x \prec x_n \prec e^ry \text{ für alle } n \geq n_0,$$

also $x \prec e^{2r}y$ und daher $x \prec y$.

(2.19) Satz: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E . P ist genau dann intern vollständig, wenn jede $\prec$ -monoton steigende, interne Cauchyfolge in P ein $\prec$ -Supremum besitzt.

Beweis: Ist P intern vollständig, so folgt die Aussage aus Satz (2.18). Habe umgekehrt jede $\prec$ -monoton steigende interne Cauchyfolge ein $\prec$ -Supremum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ interne Cauchyfolge in P , $r_1 > 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$ und

$$d_P(x_n, x_m) < r_1/2 \text{ für alle } m, n \geq n_1.$$

Wir setzen

$$y_1 := e^{-r_1} x_{n_1}.$$

Seien für ein $k \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq k$ $r_i > 0$, $n_i \in \mathbb{N}$ und $y_i \in P$ so bestimmt, daß

$$n_i < n_j \text{ und } y_i \prec y_j \text{ und } r_{i+1} = r_i/4$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i < j \leq k$,

$$y_i = e^{-r_i} x_{n_i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq i \leq k$$

und

$$d_P(x_n, x_m) < r_1/2 \text{ für alle } m, n \geq n_1 \text{ und } 1 \leq i \leq k.$$

Zu $r_{k+1} := r_k/4$ existiert ein $n_{k+1} > n_k$ derart, daß

$$d_P(x_n, x_m) < r_{k+1}/2 \text{ für alle } m, n \geq n_{k+1}.$$

Somit ist $0 < r_k/4 = r_{k+1}$ und es gilt:

$$e^{-r_k/2} x_{n_k} \prec x_{n_{k+1}} \prec e^{r_k/2 - r_{k+1}} x_{n_{k+1}},$$

also

$$y_k = e^{-r_k} x_{n_k} \prec e^{-r_{k+1}} x_{n_{k+1}} =: y_{k+1}.$$

Die so induktiv bestimmte Folge (y_n) ist interne Cauchyfolge: Sei $r > 0$, $m_0 \in \mathbb{N}$, $r_{m_0} < r/2$ ((r_n) ist Nullfolge) und

$$d(x_m, x_n) < r/2 \text{ für alle } m, n \geq m_0.$$

Weiter sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $m_0 \leq n_{k_0}$. Für alle $l, k \in \mathbb{N}$ mit $k > l \geq k_0$ ist dann

$$n_k > n_l \geq m_0, \quad r_k, r_l < r/2, \quad r/2 - r_k + r_l < r$$

und es folgt

$$\begin{aligned} e^{-r} y_l < y_l < y_k &= e^{-r_k} x_{n_k} < e^{-r_k} e^{r/2} x_{n_l} = e^{-r_k + r/2 + r_l} y_l \\ &< e^r y_l, \end{aligned}$$

also $d_P(y_l, y_k) \leq r$. (y_n) habe $\leftarrow$ -Supremum $y \in P$. Nach Satz (2.18) konvergiert (y_n) intern gegen y . Dann konvergiert auch (x_n) intern gegen y : Sei $r > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$d_P(x_m, x_n) < r/2 \quad \text{für alle } m, n \geq n_{k_0},$$

$$d_P(y, y_k) < r/2 \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

und $r_{k_0} < r/2$. Für alle $m \geq n_{k_0}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} e^{-r/2 - r_{k_0}} x_m &< e^{-r_{k_0}} x_{n_{k_0}} = y_{k_0} < y < e^{r/2} y_{k_0} \\ &= e^{r/2} e^{-r_{k_0}} x_{n_{k_0}} < e^{r/2} e^{r/2} x_m = e^r x_m. \end{aligned}$$

Wegen $-r < -r/2 - r_k$ erhält man schließlich

$$e^{-r} x_m < y < e^r x_m,$$

d.h. $d_P(y, x_m) \leq r$ für alle $m \geq n_{k_0}$.

Im allgemeinen kommt man in Satz (2.18) nicht mit dem $\leftarrow$ -Supremum aus:

(2.20) Beispiel: Sei P der konvexe Kegel aller nichtnegativen, konvergenten reellen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit einer der beiden Eigenschaften:

1. (x_n) hat einen strikt positiven Limes ;
2. (x_n) ist ab einer Stelle identisch null.

Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\prec$ -monoton steigende interne Cauchyfolge in P , so haben schließlich alle Elemente dieser Folge, d.h. schließlich alle reellen Folgen y_n , die gleiche Nullstellenmenge. Insbesondere: Gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$, so daß y_n reelle Nullfolge ist, dann gibt es bereits ein k_0 aus $\mathbb{N}$, so daß schließlich alle reellen Folgen y_n ab der Stelle k_0 identisch null sind.

In jedem Fall ist eine $\prec$ -monoton steigende interne Cauchyfolge (y_n) in P sowohl bzgl. $\prec$ als auch in der üblichen Ordnung nach oben beschränkt. Das übliche Supremum ist auch $\prec$ -Supremum, gegen das (y_n) nach Satz (2.18) intern konvergiert. Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((y_{n,k})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$y_{n,k} := \begin{cases} 1 + 1/k & \text{für } 1 \leq k \leq n \\ 1 & \text{für } k > n \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\prec$ -monoton steigende interne Cauchyfolge, ihr Limes $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} : z_n = 1 + 1/n$ aber nicht $\prec$ -Supremum von (y_n) , da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die reelle Folge $z - y_n$ Nullfolge, aber nicht ab einer Stelle identisch null und daher nicht in P ist.

Die Teile von P bestehen gerade aus solchen Teilmengen von P , die alle Folgen mit gleicher Nullstellenmenge enthalten.

III. Ein Kriterium

Wie bereits bemerkt, ist die interne Vollständigkeit einer konvexen Menge C ohne Gerade in einem Vektorraum E äquivalent zur internen Vollständigkeit aller Teile von C . Aus Satz (2.19) folgt nun zunächst :

(3.1) Kriterium: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E .

1. Wenn jede $\angle_P$ - monoton steigende, $\angle_P$ - nach oben beschränkte Folge in P ein $\angle_P$ - Supremum besitzt, ist P intern vollständig.

2. Wenn in jedem Teil Q von P jede $\angle_Q$ - monoton steigende, $\angle_Q$ - nach oben beschränkte Folge ein $\angle_Q$ - Supremum besitzt, ist P intern vollständig.

Wir werden am Beispiel (3.6) sehen, daß die beiden Kriterien nicht notwendig für die interne Vollständigkeit sind.

(3.2) Bemerkung: Die zweite Version des obigen Kriteriums hat einen größeren Anwendungsbereich als die erste. In seiner zweiten Form ist es nämlich auf Beispiel (2.20) anwendbar, nicht dagegen in seiner ersten: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$x_{n,k} := \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq k \leq 2n, \text{ } k \text{ gerade} \\ 1 & \text{für } 1 \leq k \leq 2n, \text{ } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k > 2n \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\angle$ - monoton steigend, $\angle$ - nach oben beschränkt durch die konstante Folge (1), besitzt aber kein $\angle$ - Supremum. Ist andererseits $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\angle_Q$ - monoton steigende, $\angle_Q$ - nach oben beschränkte Folge in einem Teil Q von P , so besitzen alle Elemente y_n die gleiche Nullstel-

lenmenge, das übliche Supremum liegt ebenfalls in Q und ist zugleich $\prec_Q$ - Supremum der Folge.

(3.3) Definition: Eine geordnete Menge $(M, \prec)$ heiße σ - vollständig, wenn jede abzählbare, nach oben beschränkte Teilmenge von M ein Supremum besitzt.

Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E . Ist P σ - vollständig bezüglich $\prec$, so hat jede $\prec$ - monoton steigende, $\prec$ - nach oben beschränkte Folge in P ein $\prec$ - Supremum. Sei umgekehrt P Verband bzgl. $\prec$ und jede $\prec$ - monoton steigende, $\prec$ - nach oben beschränkte Folge besitze ein $\prec$ - Supremum. Eine abzählbare $\prec$ - nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset P$ ist von der Form $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$y_n := \sup \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

ist $\prec$ - monoton, nach Definition von $\prec$ also die Folge $((1 - 2^{-n})y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\prec$ - monoton steigend und auch $\prec$ - nach oben beschränkt. Also hat die Folge $((1 - 2^{-n})y_n)$ ein $\prec$ - Supremum $y \in P$. Sei $a > 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß

$$a2^{-n} + 1 < a - 1 \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Für solche n ist

$$\frac{a + 1}{2(1 - 2^{-n})} < a$$

und wegen der Monotonie und der Gültigkeit von

$$(1 - 2^{-n})y_n < \frac{a + 1}{2} y$$

sogar

$$y_n < ay \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daher ist y $\prec$ - obere Schranke und dann auch $\prec$ - Supremum von (y_n) , desgleichen von (x_n) , d.h. von A . Wir erhalten:

(3.4) Satz: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vek-

torraum E und Verbandskegel bezüglich $\prec$. Genau dann besitzt jede $\prec$ -monoton steigende, $\prec$ -nach oben beschränkte Folge in P ein $\prec$ -Supremum, wenn $(P, \prec)$ σ -vollständig ist.

(3.5) Kriterium: Ist der konvexe Kegel P ohne Gerade in einem Vektorraum E σ -vollständiger Verbandskegel bezüglich $\prec$, so ist er intern vollständig.

Wir zeigen nun, daß (3.1) und (3.5) keine notwendige Bedingung für die interne Vollständigkeit angeben.

(3.6) Beispiel: Sei P der Kegel alle strikt positiven, stetigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[0, 2]$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei f_n definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + 2^n(x - 1) & \text{für } 1 \leq x \leq 1 + 2^{-n} \\ 2 & \text{für } 1 + 2^{-n} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$(f_n - 2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\prec$ -monoton steigende Folge und beschränkt durch die konstante Funktion 3. Die übliche, d.h. die durch den Kegel aller nichtnegativen Funktionen auf $[0, 2]$ induzierte Ordnung in P und $\prec$ stimmen überein. Da die Folge in der üblichen Ordnung ein unstetiges Supremum hat, besitzt sie kein $\prec$ -Supremum in P .

P ist einteilig. Wendet man Satz (2.8) auf P an und wählt als y in diesem Satz die konstante Funktion 1 und als Normgerade die durch V_1^1 definierte, so folgt, daß die interne Topologie in P von der Supremumsnorm auf $P - P = C[0, 2]$ induziert wird und daher vollständig ist (Satz (1.1)). P ist im übrigen $\prec$ -Verbandskegel, aber nicht $\prec$ -Verbandskegel.

Dagegen beweisen wir nun (wenn man Satz (2.18) berücksichtigt), daß die Bedingung von Kriterium (3.1) in einem Sonderfall auch

notwendig für die interne Vollständigkeit ist.

(3.7) Satz: In einem Vektorraum E sei P einteiliger konvexer Kegel ohne Gerade mit $\prec$ -nach oben beschränkter Basis B . Dann ist jede $\prec$ -monoton steigende, $\prec$ -nach oben beschränkte Folge (x_n) in P eine interne Cauchyfolge.

Beweis: O.B.d.A. sei $P \neq \{0\}$, was wegen der Einteiligkeit mit $0 \notin P$ äquivalent ist. Sei $r > 0$ und $x \in P$ $\prec$ -obere Schranke von (x_n) . Sei f Linearform auf E mit

$$B = \{x \in E \mid f(x) = 1\} \cap P$$

und $z \in P$ $\prec$ -obere Schranke von B . f ist strikt positiv auf P , für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $x_{n+k} - x_n \in P$ und daher gibt es $d_{n,k} > 0$ und $z_{n,k} \in B$ mit

$$x_{n+k} - x_n = d_{n,k} z_{n,k} \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Sei weiter für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d_n > 0, z_n \in B \quad \text{und} \quad x_n = d_n z_n.$$

Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$d_n = f(x_n) \leq f(x_{n+k}) = d_{n+k} \leq f(x),$$

also (d_n) monoton und beschränkt und somit konvergent. Weiter gilt

$$d_{n+k} - d_n = f(x_{n+k} - x_n) = d_{n,k} \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Seien $a > 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß

$$z \prec ax_1 \quad \text{und} \quad d_m - d_n < r/a \quad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Für alle $n \geq n_0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$x_{n+k} - x_n = (d_{n+k} - d_n)z_{n,k} < a^{-1}rz < a^{-1}rax_1 < rx_n,$$

also

$$(1 - r)x_n < x_{n+k} < (1 + r)x_n.$$

Wählt man nun zu gegebenem $d > 0$ $r := 1 - e^{-d}$, so folgt aus

dem 1. Teil des Beweises von Satz (2.8) $U_{x_n}^r \subset K_{x_n}^d$, also

$$d_P(x_{n+k}, x_n) < d \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad \text{und alle } k \in \mathbb{N}$$

und damit, daß (x_n) interne Cauchyfolge ist.

Auf den obigen Spezialfall kann man sich stets zurückziehen:

(3.8) Satz: Sei P einteiliger konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E und $P - P = E$. Dann gibt es einen konvexen Teilkegel Q von P mit folgenden Eigenschaften:

1. $Q - Q = E$;
2. Q ist einteilig ;
3. Mit den in Satz (2.8) eingeführten Bezeichnungen gilt $T_P = T_Q$.
4. Q besitzt eine $\angle_Q$ - beschränkte Basis.

Beweis : O.B.d.A. sei $P \neq \{0\}$, d.h. $0 \notin P$. Konstruktion von Q : Sei $y \in P$. Nach Satz (2.11) gibt es wegen der Hausdorff-Eigenschaft eine P - positive, bezüglich T_P stetige Linearform f auf E mit $f(y) = 1$. Nach Satz (2.8) liefert die Minkowski - Norm $x \mapsto |x|$ ($x \in E$) von V_y^1 gerade die Topologie T_P auf E und es gilt $|y| = 1$. Ist

$$x \in V_y^1, \text{ d.h. } -y \angle_P x \angle_P y,$$

so folgt

$$-1 = f(-y) \leq f(x) \leq f(y) = 1.$$

Da f und $x \mapsto |x|$ bzgl. T_P stetig sind, ist

$$\{x \in E \mid f(x) > \frac{1}{2} |x|\} \in T_P$$

(statt $\frac{1}{2}$ wäre jedes t mit $0 < t < 1$ für den Beweis geeignet) und wegen der für $x \mapsto |x|$ gültigen positiven Homogenität und der Dreiecksungleichung auch konvexer Kegel (sogar ohne Gerade). Da P offen bzgl. T_P , ist

$$Q := P \cap \left\{ x \in E \mid f(x) > \frac{1}{2} |x| \right\}$$

konvexer, offener Kegel ohne Gerade in E .

Zu 1 und 2: Als nichtleere, offene, konvexe Teilmenge des normierten Raumes E ist Q einteilig und erzeugt ganz E .

Zu 3: Da $Q \subset P$, ist die interne Topologie von Q feiner als die von P , wegen $Q \in T_P$ also auch T_Q feiner als T_P . Sei $x \in E$ und $|x| < 1$. Aus der Definition der Norm $x \mapsto |x|$ folgt

$$-y \prec_P x \prec_P y \text{ und daher } -4y \prec_P x \prec_P 4y.$$

Die Abschätzungen

$$\frac{1}{2} |4y - x| = \frac{1}{2} (4 + |x|) \leq \frac{5}{2} < 3 \leq 4 - f(x) = f(4y - x)$$

und entsprechend

$$\frac{1}{2} |x + 4y| < f(x + 4y)$$

liefern $4y - x, 4y + x \in Q$ und daher

$$-4y \prec_Q x \prec_Q 4y.$$

Die letzte Ungleichung definiert aber eine beschränkte Umgebung der 0 in der Topologie T_Q und ist daher enthalten in der Normkugel um 0 mit Radius 1 bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf E , welche die Topologie T_Q erzeugt. Somit ist T_Q gröber, insgesamt also gleich T_P .

Zu 4: Sei $z \in B := \{x \in Q \mid f(x) = 1\}$. Dann ist $z \in P$ und

$$1 = f(z) > \frac{1}{2} |z|, \text{ also } 2 > |z|.$$

Das impliziert insbesondere

$$0 \prec_P z \prec_P 6y.$$

Wie beim Beweis von 3. zeigt man, daß $z \prec_Q 6y$. $6y$ liegt folglich in Q und ist $\prec_Q$ -obere Schranke der Basis B von Q .

(3.9) Bemerkung: Einteilige, konvexe Kegel ohne Gerade mit

ordnungsbeschränkter Basis erweisen sich als "well - based" im Sinn von JAMESON [11; p.120].

Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem Vektorraum E . Zunächst reduziert sich die Untersuchung der internen Vollständigkeit von P auf die der Teile von P . Der obige Satz zusammen mit Satz (1.1) und Satz (2.8) gestattet es, sich sogar auf die Untersuchung gewisser Teilkegel zu beschränken, die genau dann intern vollständig sind, wenn die Voraussetzungen von Kriterium (3.1) erfüllt sind.

Auf Beispiel (3.6) war Kriterium (3.1) zunächst nicht anwendbar. Ein Teilkegel Q mit ordnungsbeschränkter Basis, auf den sich das Kriterium anwenden läßt, ist der, den man erhält, wenn man als Linearform f im Beweis des obigen Satzes ein Punktmaß mit Träger in $[0,2]$ wählt. Nach Korollar (2.10) ist f dann nämlich stetig.

IV. Vollständigkeitskriterien mit topologischen Prämissen

(4.1) Satz: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem lokal-konvexen Hausdorff - Raum (E, T) . T restringiert auf P sei gröber als die interne Topologie von P . Wenn dann der Kegel P vollständig ist, so ist er auch intern vollständig.

Beweis: Aus der Vollständigkeit folgt die Abgeschlossenheit von P bzgl. T und nach Bemerkung (2.15) und Satz (2.16) weiterhin $\prec = \prec$. Bezeichnet P^+ die Menge der P - positiven, bzgl. T stetigen Linearformen auf E , so gilt

$$P = \bigcap_{f \in P^+} \{x \in E \mid f(x) \geq 0\}.$$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\prec$ - monoton steigende, interne Cauchyfolge in P . Nach Satz (2.19) ist zu zeigen, daß (x_n) ein $\prec$ - Supremum besitzt. Dazu weisen wir erst nach, daß (x_n) Cauchy - folge bzgl. T ist.

Sei nämlich U eine konvexe, symmetrische T - Umgebung der 0 . Da die interne Topologie feiner ist als die Restriktion von T auf P , gibt es ein

$$d > 0 : K_{x_1}^d \subset \frac{1}{2} U + x_1.$$

(x_n) liege o.B.d.A. bereits in einem Teil von P . Dann ist $\{d_P(x_1, x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und es gibt ein

$$a > 1 : a^{-1} x_n \prec_P x_1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für ein genügend kleines $r > 0$ gilt sogar

$$(e^r - 1)x_n \prec_P (e^d - 1)x_1 \text{ und } (1 - e^{-r})x_n \prec_P (1 - e^{-d})x_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_P(x_n, x_m) < r, \text{ insbesondere } e^{-r} x_{n_0} \prec_P x_m \prec_P e^r x_{n_0}$$

für alle $m, n \geq n_0$. Nun folgt

$$x_{n_0} + (e^{-d} - 1)x_1 \prec_P x_{n_0} + (e^{-r} - 1)x_{n_0} = e^{-r}x_{n_0} \prec_P x_m$$

$$\prec_P e^r x_{n_0} = x_{n_0} + (e^r - 1)x_{n_0} \prec_P (e^d - 1)x_1 + x_{n_0},$$

also

$$e^{-d}x_1 \prec_P x_m - x_{n_0} + x_1 \prec_P e^d x_1,$$

$$x_m - x_{n_0} + x_1 \in K_{x_1}^d \subset \frac{1}{2}U + x_1$$

und schließlich

$$x_m - x_{n_0} \in \frac{1}{2}U \text{ für alle } m \geq n_0.$$

Aus Symmetrie und Konvexität von U erhält man nun

$$x_m - x_n = x_m - x_{n_0} - (x_n - x_{n_0}) \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$$

für alle $m, n \geq n_0$.

Daher ist (x_n) Cauchyfolge bzgl. T und hat dort einen Limes $y \in P$. Ist $z \in P$ eine $\prec$ - obere Schranke von (x_n) , so folgt

$$f(x_n) \leq f(x_{n+k}) \leq f(z) \text{ für alle } n, k \in \mathbb{N}$$

und alle $f \in P^+$. Also ist $(f(x_n))$ für alle $f \in P^+$ monoton steigend und beschränkt durch $f(z)$. Für jedes $f \in P^+$ gilt daher

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(z),$$

also

$$0 \leq f(z - y) \text{ und } 0 \leq f(y - x_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus obiger Charakterisierung von P durch P^+ folgt $z - y \in P$, $y - x_n \in P$ und somit

$$x_n \prec y \prec z \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daher ist y das $\prec$ - Supremum von (x_n) .

Es bleibt noch zu untersuchen, wann eine gegebene Vektorraum-topologie größer ist als die interne Topologie.

In einem Vektorraum E sei eine lokalkonvexe Hausdorff -

Topologie T' mit zugehöriger Mackey - Topologie T und dem (stetigen) Dualraum $E_{T'}' = E_T'$ gegeben; weiterhin eine lokal-konvexe Hausdorff - Topologie S mit dem Dualraum E_S' , so daß S die Mackey - Topologie des dualen Paares (E, E_S') ist. Es sei $E_T' \subset E_S'$, d.h. die schwache Topologie $s(E, E_S')$ sei feiner als $s(E, E_T')$. Dann ist auch S feiner als T und T' : T ist nämlich die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf der Menge der absolutkonvexen, $s(E_T', E)$ - kompakten Teilmengen von E_T' . Die analoge Aussage gilt für S . $s(E_T', E)$ ist die Restriktion von $s(E_S', E)$ auf E_T' . Allgemein sind Mengen, die bezüglich der in einer Teilmenge eines topologischen Raumes induzierten Topologie kompakt sind, auch im gegebenen topologischen Raum kompakt. Also sind die $s(E_T', E)$ - kompakten Mengen auch $s(E_S', E)$ - kompakt. Ist eine Menge in E_T' absolutkonvex, so auch in E_S' . Damit folgt die Behauptung. Wir verwenden diese Überlegung beim Beweis der anschließenden Aussage.

(4.2) Satz: Sei P konvexer Kegel ohne Gerade in einem lokal-konvexen Hausdorff - Raum E mit dem Dualraum E' . Dann gilt:

1. Wenn jedes $f \in E'$ Differenz positiver (nicht notwendig stetiger) Linearformen auf E ist, dann ist die interne Topologie von P feiner als die Restriktion der Topologie von E auf P .

2. Ist P einteilig, so gilt auch die Umkehrung von 1.

Beweis: Zu 1: Sei $f \in E'$, g und h seien positive Linearformen auf E mit $f = g - h$. Für jeden Teil Q von P sind nach Korollar (2.10) die Restriktion von g und h auf $Q - Q$ stetig bzgl. T_Q . Also ist für jeden Teil Q von P die Restriktion eines jeden $f \in E'$ stetig auf $Q - Q$ bezüg-

lich T_Q . Als normierbare Topologie ist T_Q eine Mackey - Topologie. Wählt man in der obigen Überlegung als T' die Restriktion der Topologie von E auf $Q - Q$ und als S die Topologie T_Q , so hat man $E'_T \subset E'_S$ und es folgt, daß die Restriktion der Topologie von E auf $Q - Q$ für jeden Teil Q von P gröber ist als T_Q . Dann ist auch die Restriktion der Topologie von E auf Q gröber als die interne Topologie von Q . Mit dem Ergebnis 1 von Abschnitt I folgt die Behauptung.

Zu 2: Sei P einteilig und die interne Topologie von P feiner als die Restriktion der Topologie von E auf P . Sei U eine Umgebung der 0 in der Topologie von E , $y \in P$. Dann gibt es eine interne Umgebung V von y mit $V \subset y + U$ und nach Satz (2.8) eine Umgebung V' der 0 bzgl. T_P mit

$$V' + y \subset V \subset U + y,$$

also $V' \subset U$. Daher ist auch die Restriktion der Topologie von E auf $P - P$ gröber als T_P . Sei $f \in E'$. Die Restriktion von f auf $P - P$ ist stetig in der Topologie T_P . Nach Satz (2.11) gibt es daher positive Linearformen g und h auf $P - P$, so daß

$$f = g - h \text{ auf } P - P.$$

Sei A eine algebraische Basis von $P - P$, $B \supset A$ eine algebraische Basis von E . Jede Linearform ist durch ihre Werte auf einer Basis bereits bestimmt. Durch die Festsetzungen

$$g'(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für alle } x \in A \\ f(x) & \text{für alle } x \in B \setminus A \end{cases}$$

und

$$h'(x) := \begin{cases} h(x) & \text{für alle } x \in A \\ 0 & \text{für alle } x \in B \setminus A \end{cases}$$

werden durch lineare Fortsetzung Linearformen g' und h' auf E definiert, für die $f = g' - h'$ gilt. Entsprechend der Kon-

struktion sind g' und h' positiv.

Wir stellen jetzt noch den Zusammenhang mit bereits bekannten Kriterien für die interne Vollständigkeit her.

(4.3) Kriterium (BELLMANN [7]): Sei P vollständiger konvexer Kegel ohne Gerade in einem lokalkonvexen Hausdorff-Raum E und E' bzw. P^+ definiert wie in den Sätzen (4.1) und (4.2). Gilt dann $E' = P^+ - P^+$, so ist P intern vollständig.

Das Kriterium folgt unmittelbar aus den erwähnten Sätzen.

(4.4) Definition: Ein konvexer Kegel P in einem lokalkonvexen Raum E heiße normal, wenn es eine die Topologie von E definierende Familie $(p_i)_{i \in I}$ von Halbnormen gibt mit der Eigenschaft:

$y - x \in P \implies p_i(x) \leq p_i(y)$ für alle $x, y \in P$ und alle $i \in I$.

Nach SCHÄFER [12; p.220] gilt für normale Kegel in einem lokalkonvexen Hausdorff-Raum, daß jede stetige Linearform Differenz zweier positiver, stetiger Linearformen ist (Solche Kegel enthalten nach BAUER [2; p.10] keine Gerade).

Man erhält als Folgerung der obigen Sätze :

(4.5) Kriterium (BAUER [2; p.13]): Jeder vollständige, normale Kegel in einem lokalkonvexen Hausdorffraum ist intern vollständig.

(4.6) Bemerkung: Bei BAUER [2] und BELLMANN [7] werden der Begriff "normal" und das Kriterium allgemeiner für konvexe Mengen C formuliert. Nach den Ergebnissen von BELLMANN [7] kann man sich aber nach Einbettung von C in $C \times \{1\} \subset E \times \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie und Bildung des von $C \times \{1\}$ erzeugten Kegels auf den Fall von Kegeln zurückziehen. Bei der

Einbettung bleibt die Normalität erhalten und $C \times \{1\}$ ist genau dann normal, wenn es der erzeugte Kegel ist.

Insbesondere erweisen sich vollständige konvexe Kegel ohne Gerade in einem schwachen, lokalkonvexen Hausdorff - Raum als normal (BAUER [2; p.11]) .

(4.7) Kriterium: Jeder vollständige, konvexe Kegel ohne Gerade in einem schwachen, lokalkonvexen Hausdorff - Raum ist intern vollständig.

Wir zeigen noch, daß der Anwendungsbereich von Kriterium (3.1) den von Kriterium (4.7) umfaßt.

(4.8) Satz: Sei P vollständiger, konvexer Kegel ohne Gerade in einem schwachen, lokalkonvexen Hausdorff - Raum (E, T) . Dann hat jede $<$ - monoton steigende, $<$ - nach oben beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P ein $<$ - Supremum.

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist jede stetige Linearform auf E Differenz stetiger, positiver Linearformen. Nach Satz (4.2) ist die interne Topologie von P feiner als T eingeschränkt auf P . Sei (x_n) wie gefordert, $y \in P$ eine $<$ - obere Schranke von (x_n) . Für jede positive, stetige Linearform f auf E gilt

$$f(x_n) \leq f(x_{n+k}) \leq f(y) \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Für solche f ist $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt, also konvergent. Daher ist (x_n) schwache Cauchy - folge. Der Rest des Beweises verläuft dann wie der von Satz (4.1) .

V. Durchschnitte intern vollständiger Mengen

Sei $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie intern vollständiger, konvexer Mengen ohne Gerade in einem Vektorraum E , C ihr Durchschnitt und D ein Teil von C . Wegen Lemma (2.3) und (2.4) können wir annehmen, daß die Familie (C_i) aus Basen einer Familie $(P_i)_{i \in I}$ von konvexen Kegeln ohne Gerade in E besteht. Wir werden daher ohne weiteren Hinweis auf die entsprechenden Kegelordnungen (bezeichnet mit $\prec_i$ für alle $i \in I$) zurückgreifen.

Da die Teile einer konvexen Menge ohne Gerade eine disjunkte Zerlegung der Menge liefern, ist D bereits der Durchschnitt eindeutig bestimmter Teile $(D_i)_{i \in I}$ ($D_i \subset C_i$ für alle $i \in I$), sofern D nicht leer ist. Da C genau dann intern vollständig ist, wenn es seine Teile sind, genügt es für das gestellte Problem, sich auf die Untersuchung der internen Vollständigkeit von nicht-leeren Durchschnitten einteiliger, intern vollständiger, konvexer Mengen ohne Gerade zu beschränken.

(5.1) Satz: Sei $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie einteiliger, konvexer Mengen ohne Gerade in einem Vektorraum E mit den jeweiligen internen Metriken d_i ($i \in I$), $C := \bigcap_{i \in I} C_i$ mit der internen Metrik d_C . Dann gilt für alle $x, y \in C$:

$$d_C(x, y) = \sup_{i \in I} d_i(x, y).$$

Insbesondere ist C für endliches $I \neq \emptyset$ einteilig.

Beweis: Mit $x, y \in C$ ist $x, y \in C_i$ für alle $i \in I$. Sei $r > 0$. Dann gilt:

$$x + r(x - y), \quad y + r(y - x) \in C$$

$$\Leftrightarrow x + r(x - y), y + r(y - x) \in C_1 \text{ für alle } i \in I$$

$$\Leftrightarrow d_1(x, y) < \log(1 + 1/r) \text{ für alle } i \in I,$$

da alle C_1 einteilig sind. Die Behauptung ist abzulesen.

(5.2) Satz: Sei $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie einteiliger, konvexer Mengen ohne Gerade in einem Vektorraum E und I endlich.

Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C := \bigcap_{i \in I} C_i$, die für alle $i \in I$

C_1 - interne Cauchyfolge ist, ist auch C - interne Cauchyfolge.

Beweis: Zu $r > 0$ existieren für alle $i \in I$ Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ mit

$$d_1(x_n, x_m) < r \text{ für alle } n \geq n_i \text{ und } i \in I$$

und daher

$$d_C(x_n, x_m) < r \text{ für alle } n \geq \max \{n_i \mid i \in I\}.$$

(5.3) Satz: Seien C_1, C_2 intern vollständige, einteilige,

konvexe Mengen ohne Gerade in einem Vektorraum E , $C := C_1 \cap C_2$

und für $y \in C$ und $i = 1, 2$

$$K_1(y) := \{x \in C_1 \mid d_1(x, y) < 1\}.$$

Dann sind äquivalent:

1. C ist intern vollständig ;

2. Für ein (und dann für jedes) $y \in C$ enthält $K_1(y) + K_2(y)$ keine Gerade.

Beweis: Die Kugeln $K_1(y)$ sind konvex ($y \in C$, $i = 1, 2$):

Aus $x, z \in K_1(y)$ folgt nach der Charakterisierung der internen Metrik S.4 :

$$e^{-1}y \prec_1 x, z \prec_1 e^1y.$$

Multiplikation mit t bzw. $1 - t$ ($0 < t < 1$) und Addition

der Ungleichungen

$$e^{-1}y \prec_i x \prec_i ey, \quad e^{-1}y \prec_i z \prec_i ey$$

ergibt

$$e^{-1}y \prec_i tx + (1-t)z \prec_i ey \quad (i = 1, 2)$$

und damit die Konvexität von $K_1(y)$.

"1 $\implies$ 2": Sei $y \in C$. Angenommen, $K_1(y) + K_2(y)$ enthält eine

Gerade. Dies gilt dann für jedes $r > 0$ auch von den Mengen

$$r(K_1(y) + K_2(y)) - 2ry = r(K_1(y) - y) + (K_2(y) - y).$$

Wegen

$$iK_y^1 - y \subset iV_y^2 \quad (i = 1, 2)$$

enthält auch $r(V_y^1 + V_y^2)$ für jedes $r > 0$ eine Gerade,

insbesondere für $r = 1/2$. Nach Satz (2.8) enthält also

$V_y^1 + V_y^2$ eine Gerade und ist konvex und symmetrisch. Die da-

rin enthaltene Gerade g werde beschrieben durch $z + tx$

($t \in \mathbb{R}$) mit einem geeigneten $z \in V_y^1 + V_y^2$ und $0 \neq x \in E$.

Wegen $-z \in V_y^1 + V_y^2$ und der Konvexität liegt für $z \neq 0$ so-

gar jede Parallele zu g , welche die offene Verbindungsstrecke

von z und $-z$ schneidet, also auch die Parallele zu g

durch 0 noch in der Menge:

$$(*) \quad tx \in V_y^1 + V_y^2 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $z = 0$ hatte man diese Aussage bereits.

Sei $x = u_1 + u_2$ mit $u_i \in V_y^1$, also

$$-y \prec_i u_i \prec_i y \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Man erhält dann

$$x = u_1 + u_2 = (u_1 + y) - (y - u_2) = v_1 - v_2$$

mit $v_i \in P_i$ für $i = 1, 2$. Wegen $(*)$ folgt

$$v_1 - v_2 \in tV_y^1 + tV_y^2 \quad \text{für alle } t \neq 0.$$

Für alle solchen t gibt es deshalb Elemente $v_{i,t} \in t^i v_y^1$ ($i = 1, 2$) mit

$$v_1 - v_2 = v_{1,t} + v_{2,t}, \text{ also } v_1 - v_{1,t} = v_2 + v_{2,t}.$$

Wegen der Symmetrie folgt insbesondere für alle $t > 0$

$$(v_1 + t^1 v_y^1) \cap (v_2 + t^2 v_y^1) \neq \emptyset.$$

Nach Bemerkung (2.9) bildet $(v_i + t^i v_y^1)_{0 < t < t_0}$ für genügend kleines $t_0 > 0$ eine P_i -interne Umgebungsbasis von v_i ($i = 1, 2$). Daher gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $P_1 \cap P_2$, die für $i = 1, 2$ P_i -intern gegen v_i konvergiert. Nach Satz (5.2) ist (x_n) $(P_1 \cap P_2)$ -interne Cauchyfolge. Hätte (x_n) einen $(P_1 \cap P_2)$ -internen Limes v , so wäre v nach Satz (5.1) auch P_i -interner Limes der Folge und damit $v_1 = v = v_2$, im Widerspruch zu $v_1 - v_2 = x \neq 0$. Also ist $P_1 \cap P_2$ nicht intern vollständig, nach Satz (2.5) ebenso C als Basis dieses Kegels.

"2 $\Rightarrow$ 1": Angenommen, C ist nicht intern vollständig. Dann gibt es eine C -interne Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in C , welche nicht konvergiert. Nach Satz (5.1) ist (x_n) C_i -interne Cauchyfolge und konvergiere etwa gegen $v_i \in C_i$ ($i = 1, 2$). Es ist $v_1 \neq v_2$, da sonst $v := v_1 = v_2$ C -interner Limes von (x_n) wäre. Sei $y \in C$. Da $(v_i + t^i v_y^1)_{0 < t < t_0} \cap C_i$ für genügend kleines $t_0 > 0$ eine C_i -interne Umgebungsbasis von v_i bildet ($i = 1, 2$), ist

$$C \cap (v_1 + t^1 v_y^1) \cap (v_2 + t^2 v_y^1) \neq \emptyset$$

zunächst für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t < t_0$ und wegen der

Symmetrie und Konvexität für alle $t \neq 0$. Für alle solchen t gibt es daher

$$v_{i,t} \in {}^1v_y^1, \text{ also } -y \prec_1 v_{i,t} \prec_1 y$$

mit

$$v_1 + tv_{1,t} = v_2 + tv_{2,t} \in C \quad (i = 1, 2).$$

Für $i = 1, 2$ sei f_i Linearform auf E mit

$$C_i = \{x \in E \mid f_i(x) = 1\} \cap P_i.$$

Wegen $v_i \in C_i$ folgt nach Anwendung von f_i

$$f_i(v_{i,t}) = 0 \quad \text{für alle } t \neq 0$$

und wegen $y \pm v_{i,t} \in P_i$ und der Konvexität für alle $0 \leq r \leq 1$:

$$y \pm rv_{i,t} \in C_i \quad (i = 1, 2).$$

Für alle $t \neq 0$ und alle $0 < r \leq 1$ gilt daher

$$\begin{aligned} 2y + \text{tr}(v_1 - v_2) &= 2y + \text{tr}(v_{1,1/t} - v_{2,1/t}) \\ &= (y + rv_{1,1/t}) + (y - rv_{2,1/t}) \\ &\in (C \cap (y + r{}^1v_y^1)) + (C \cap (y + r{}^2v_y^1)) =: M_r. \end{aligned}$$

M_r enthält dann natürlich die ganze Gerade $2y + \text{tr}(v_1 - v_2)$ ($t \in \mathbb{R}$) und ist nach Bemerkung (2.9) und Lemma (2.3) für genügend kleines $r > 0$ selbst in $K_1(y) + K_2(y)$ enthalten.

(5.4) Satz: Sei $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie einteiliger, intern vollständiger, konvexer Mengen ohne Gerade in einem Vektorraum E und $C := \bigcap_{i \in I} C_i$. Dann ist jede C -interne Cauchyfolge in C auch C_i -interne Cauchyfolge für alle $i \in I$ und es sind äquivalent:

1. C ist intern vollständig;
 2. Jede C -interne Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in C hat für alle $i \in I$ den gleichen C_i -internen Limes.
- Jede dieser Bedingungen ist erfüllt, falls gilt:

3. Für ein (und dann für jedes) $y \in C$ und je zwei $i, j \in I$ ($i \neq j$) enthält $K_i(y) + K_j(y)$ (definiert wie in Satz (5.3)) keine Gerade .

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus Satz (5.1).

"1 $\implies$ 2": Ist $x \in C$ Limes der C - interne Cauchyfolge (x_n) , dann ist x nach Satz (5.1) auch C_i - interner Limes der Folge und daher in allen C_i ($i \in I$) gleich.

"2 $\implies$ 1": Sei (x_n) C - interne Cauchyfolge und x der gemeinsame Limes von (x_n) in jedem C_i ($i \in I$). Dann ist $x \in C$. Sei $r > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_C(x_n, x_m) < r \text{ für alle } m, n \geq n_0 .$$

Dann folgt

$d_{C_i}(x_n, x_m) < r$ und $d_{C_i}(x_n, x) \leq r$ für alle $m, n \geq n_0$ und alle $i \in I$, somit

$$d_C(x_n, x) = \sup_{i \in I} d_{C_i}(x_n, x) \leq r \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

"3 $\implies$ 2": Sei (x_n) C - interne Cauchyfolge in C , $i, j \in I$, $v_i \in C_i$ und $v_j \in C_j$ seien die C_i - bzw. C_j - internen Limiten von (x_n) , $v_i \neq v_j$. (x_n) ist auch $(C_i \cap C_j)$ - interne Cauchyfolge. Also ist nach dem 2. Teil des Beweises von Satz (5.3) die Eigenschaft 3 nicht erfüllt.

(5.5) Korollar: Enthält unter den Voraussetzungen von Satz

(5.4) $C_i \cap C_j$ für alle $i, j \in I$ eine C_i - oder C_j - interne offene Menge, so ist C intern vollständig. Insbesondere: Ist (C_i) eine absteigende Familie, so ist C intern vollständig.

Beweis: Sei $i, j \in I$ und enthalte $C_i \cap C_j$ etwa eine C_i - interne offene Menge U . Sei $y \in U$. Mit einem geeigneten $0 < d < 1$ liegt die Kugel K_y^d um y mit Radius d bzgl.

der internen Metrik d_i in $C_i \cap C_j$. Daher enthält

$$i_{K_y}^d + j_{K_y}^d \subset 2C_j$$

keine Gerade. Für genügend kleine $r > 0$ liegt aber $2y + r(K_i + K_j - 2y)$ in dieser Menge. Für die zweite Aussage genügt es zu bemerken, daß jedes C_i ($i \in I$) C_i - intern offen ist.

Wir zeigen noch, daß Durchschnitte intern vollständiger, konvexer Mengen ohne Gerade im allgemeinen nicht wieder intern vollständig sind.

(5.6) Beispiel: Für jedes $n \in N_0$ sei die reelle Folge $v_n = (v_{n,k})_{k \in N}$ definiert durch

$$v_{n,k} := \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq k < n \\ k - n & \text{für } k \geq n. \end{cases}$$

Für jede reelle Folge $(a_n)_{n \in N_0}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n$. Die

Menge E_1 aller reellen Folgen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n$, wobei

$(a_n)_{n \in N_0}$ reelle Folge und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|/(n+1)$ konvergiert,

bildet einen Vektorraum. Jedes $v \in E_1$ hat eine eindeutige Darstellung der beschriebenen Form. Ist nämlich

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n v_n$$

mit reellen Folgen (a_n) und (b_n) , so folgt

$$(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) v_n$$

und durch Induktion unter Ausnützung der speziellen Gestalt der v_n

$$a_n - b_n = 0 \quad \text{für alle } n \in N_0.$$

Wir definieren auf E_1 eine Norm durch

$$\|v\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| / (n+1),$$

wenn $v \in E_1$ die Darstellung $v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n$ hat. E_1 ist vollständig unter dieser Norm: Sei nämlich $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E_1 und gelte $u_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} v_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei weiter $r > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|u_n - u_m\|_1 \leq r \quad \text{für alle } m, n \geq n_0,$$

das heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k} - a_{m,k}| / (k+1) \leq r.$$

Es folgt

$$|a_{n,k} - a_{m,k}| \leq r(k+1) \quad \text{für alle } m, n \geq n_0$$

und jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Daher konvergiert $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, etwa gegen $a_k \in \mathbb{R}$. Auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k} - a_k| / (k+1)$

konvergiert dann für jedes $n \geq n_0$ und hat einen Wert $\leq r$, da $\sum_{k=0}^m |a_{n,k} - a_k| / (k+1) \leq r$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| / (k+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k - a_{n,k} + a_{n,k}| / (k+1) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k - a_{n,k}| / (k+1) + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| / (k+1) \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$ beendet den Beweis.

Wir konstruieren noch einen zweiten Raum. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $w_n = (w_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$w_{n,k} := \begin{cases} k & \text{für } 1 \leq k \leq n \\ n & \text{für } k > n \end{cases}$$

und $w_0 := v_0 \in E_1$. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ reelle Folge, so daß

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist

$$w_{m,k} \leq k \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n w_{n,k}| \leq k \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n$. Die Menge E_2 aller reellen

Folgen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n$, wobei (a_n) reelle Folge und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, bildet einen Vektorraum. Jedes $w \in E_2$ besitzt eine eindeutige Darstellung der beschriebenen Form.

Aus

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w_n$$

mit reellen Folgen (a_n) und (b_n) , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ konvergieren, folgt

$$(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) w_n.$$

Für die Komponente $k = 1$ in der Summenbildung ist also

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n),$$

für $k = 2$ folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) 2^n - (a_1 - b_1) = 0, \text{ also } a_1 = b_1$$

und induktiv

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (k+1)^n - (a_k - b_k) = 0, \text{ also } a_k = b_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Schließlich folgt dann auch $a_0 = b_0$.

Wir definieren auf E_2 eine Norm durch

$$\|w\|_2 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| / (n+1),$$

wenn $w \in E_2$ die Darstellung $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n$ hat. E_2 ist

nicht vollständig unter dieser Norm. Z.B. hat die Folge

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $z_n = \sum_{k=0}^n 1/(k+1) w_k$ für alle n

$\in \mathbb{N}$, keinen Limes in E_2 , ist aber Cauchyfolge.

E_1 und E_2 haben aber folgende Eigenschaft: Ist

$$K_1 := \{x \in E_1 \mid \|x\|_1 < 1\} \quad (i = 1, 2),$$

so enthält $K_1 + K_2$ eine Gerade. Ist nämlich $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$v_n + w_n = v_0 = w_0 ,$$

wobei $\|v_n\|_1 = 1/(n+1) = \|w_n\|_2$, also

$$\pm nv_0 = \pm(nv_n + nw_n) \in K_1 + K_2 ,$$

woraus wegen der Konvexität die Behauptung folgt.

Wir sind also in folgender Situation: Gegeben ist ein Vektorraum F mit Unterräumen F_1 und F_2 , die mit Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ versehen sind. $(F_1, \|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum und die Summe der beiden Normkugeln K_1 und K_2 enthält eine Gerade. Sei $F_0 \subset F_2$ der Unterraum der Nullfolgen bzgl. $\|\cdot\|_2$ im Raum F_2 . Der Quotientenraum F/F_0 bildet in der üblichen Weise einen Vektorraum. Wir bezeichnen ihn mit $\tilde{F}$. Die Teilmenge $\tilde{F}_2$ von $\tilde{F}$, deren Elemente Cauchyfolgen von F_2 als Repräsentanten haben, bildet einen Unterraum von $\tilde{F}$ und zwar gerade die Vervollständigung von $(F_2, \|\cdot\|_2)$ bezüglich der Norm. Wir bezeichnen sie mit $(\tilde{F}_2, \|\cdot\|_2)$. F_1 kann vermöge der Zuordnung

$x \in F_1$ geht über in die Klasse $\tilde{x} \in \tilde{F}$, welche die konstante Folge (x) enthält

in einen Teilraum $\tilde{F}_1$ von $\tilde{F}$ eingebettet werden und trage die transportierte Norm $\|\cdot\|_1$. Dann sind $(\tilde{F}_1, \|\cdot\|_1)$ und $(\tilde{F}_2, \|\cdot\|_2)$ Banachräume. Ihr Durchschnitt $\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2$ ist gerade die Einbettung von $F_1 \cap F_2$ in $\tilde{F}$. Nach BAUER [3; p.20] sind die offenen Normkugeln $\tilde{K}_1$ und $\tilde{K}_2$ um $0 \in \tilde{F}$ mit Radius 1 einteilig, die internen Topologien stimmen mit der Einschränkung der Normtopologien überein und nach Satz (1.1) sind $\tilde{K}_1$ und $\tilde{K}_2$ intern vollständig. Ihr Durchschnitt $\tilde{K}_3 := \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2$ ist die offene Normkugel um 0 mit Radius 1 im Raum

$(\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2, \max \{ \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \})$. Da die Familie $(r\tilde{K}_i)_{0 < r < 1}$ eine interne Umgebungsbasis der 0 in $\tilde{K}_i$ ($i = 1, 2$) bildet, und für jedes $r > 0$ $r\tilde{K}_1 + r\tilde{K}_2$ eine Gerade enthält, ist nach Satz (5.3) $\tilde{K}_3$ nicht intern vollständig (und damit äquivalent, $(\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2, \max \{ \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \})$ kein Banachraum).

Literaturverzeichnis

- [1] BAUER, H., An open mapping theorem for convex sets with only one part, Aequationes math. 4 (1970), 332-337.
- [2] ——— Intern vollständige konvexe Mengen, Theory of sets and topology, Berlin (1972), 27-38.
- [3] BAUER, H. and H.S. BEAR, The part metric in convex sets, Pacific J. Math. 30 (1969), 15-33.
- [4] BEAR, H.S., A geometric characterization for Gleason parts, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 407-412.
- [5] ——— Lectures on Gleason parts, Lecture Notes in Mathematics 121 (1970), Springer - Verlag.
- [6] BEAR, H.S. and M.L. WEISS, An intrinsic metric for parts, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 812-817.
- [7] BELLMANN, R., Unveröffentlichtes Manuskript.
- [8] BOURBAKI, N., Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1-2 (2^e édition), Act. Sci. et Ind. 1189, Paris (1966).
- [9] ——— Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3-5, Act. Sci. et Ind. 1229, Paris (1967).
- [10] GLEASON, A.M., Function algebras, Seminar on analytic functions, Vol. 2, Institute for Advanced Study, Princeton (1957).
- [11] JAMESON, G., Ordered linear spaces, Lecture Notes in Mathematics 141 (1970), Springer - Verlag.
- [12] ZITZMANN, N., Topologische, abstrakte konvexe Mengen. Diplomarbeit an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Lebenslauf

Am 31. März 1944 wurde ich als einziger Sohn des damals bereits gefallenen Gerichtsassessors Pankraz Gunselmann und seiner Ehefrau Anna, geb. Arneth, in Bamberg geboren. Ich besuchte ab 1950 die Volksschule in Eggolsheim und Neuses bei Forchheim, ab 1954 das Alte Gymnasium in Bamberg. Dort legte ich im Juli 1963 das Abitur ab.

Ab dem Wintersemester 1963/64 studierte ich an der Universität Erlangen - Nürnberg Mathematik. Ich hörte Vorlesungen bei den Professoren Bauer, Fleischmann, Händler, Jakobs, Meinardus, Nöbeling, Rieger, Specht und Volz. Die Diplom - Vorprüfung bestand ich im Mai 1966.

Im akademischen Jahr 1966/67 studierte ich am Oberlin College, Ohio, USA. und besuchte Vorlesungen der Professoren Goldberg und Stoll. Nach Erlangen zurückgekehrt, erhielt ich von Herrn Professor Specht eine Diplomarbeit und bestand im Oktober 1969 die Diplom - Prüfung in Mathematik. Seit dem Wintersemester 1967/68 war ich mit Unterbrechungen am Institut für Mathematische Maschinen und am Mathematischen Institut Erlangen als Hilfskraft und Tutor beschäftigt. Seit Herbst 1970 bin ich Doktorand bei Herrn Professor Bauer in Erlangen.

1. Die erste Gruppe von ...
2. Die zweite Gruppe von ...
3. Die dritte Gruppe von ...
4. Die vierte Gruppe von ...
5. Die fünfte Gruppe von ...
6. Die sechste Gruppe von ...
7. Die siebte Gruppe von ...
8. Die achte Gruppe von ...
9. Die neunte Gruppe von ...
10. Die zehnte Gruppe von ...
11. Die elfte Gruppe von ...
12. Die zwölfte Gruppe von ...
13. Die dreizehnte Gruppe von ...
14. Die vierzehnte Gruppe von ...
15. Die fünfzehnte Gruppe von ...
16. Die sechzehnte Gruppe von ...
17. Die siebenzehnte Gruppe von ...
18. Die achtzehnte Gruppe von ...
19. Die neunzehnte Gruppe von ...
20. Die zwanzigste Gruppe von ...
21. Die einundzwanzigste Gruppe von ...
22. Die zweiundzwanzigste Gruppe von ...
23. Die dreiundzwanzigste Gruppe von ...
24. Die vierundzwanzigste Gruppe von ...
25. Die fünfundzwanzigste Gruppe von ...
26. Die sechsundzwanzigste Gruppe von ...
27. Die siebenundzwanzigste Gruppe von ...
28. Die achtundzwanzigste Gruppe von ...
29. Die neunundzwanzigste Gruppe von ...
30. Die hundertste Gruppe von ...

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990